易懂的雷达信号处理

面向学生与工程师

第二章：信号基础

作者：唐承乾

版本：社区版 V1

官方仓库：`https://github.com/apple-art/easy-radar-tutorial`

目录

第 1 章我们已经知道，雷达之所以有用，是因为它能发出电磁波、接收回波，再从回波里读出目标信息。可如果你继续追问一句："那机器到底在读什么？" 答案就会落到这一章：它读的是信号，要做的是信号处理。

所以第 2 章讲 "通用信号知识"，给后面所有雷达处理打地基。后面不管是测距离、测速，还是目标检测，本质上都离不开这几个最基本的问题：什么叫信号？为什么同一个信号可以从时域和频域两种角度来看？连续变化的信号，怎么才能交给计算机去处理？

信号处理是大二的基础课程，早于雷达这样的专业课，所以我默认读者懂基本的数字信号处理，比如傅里叶变换、FFT。本章节带着读者快速过一遍，如果基础牢靠，读者可以直接跳过本章。

这一章我建议你按下面这条主线来读：

核心内容（必须掌握）：

- 2.1：什么是信号，振幅、频率、周期分别在描述什么
- 2.2：时域和频域到底是在看同一个东西的哪两个侧面
- 2.3：为什么必须采样，采样过慢又会出什么问题

巩固内容：

- 2.4：小练习，用来检查你是不是真的把频率、频谱和采样关系想清楚了

2.1 信号的基本概念

物理课上量温度，结果是一个数：36.5℃。但温度计放在室外，早上冷、中午热、傍晚又凉下来——这个数在变。把" 随时间变化的物理量" 记录下来画成曲线，就是**信号**。

雷达发出的电磁波、麦克风收到的声音、心电图的电压，都是信号。它们的共同点：值在持续变化，变化本身携带信息。医生盯着心电图看的不是某一刻的数值，而是波形的节律是否平稳，从而判断心脏的跳动，波形一旦消失则意味着心跳停止。雷达的逻辑也一样：发出信号，等待回波，回波的形态里藏着目标的距离、速度，乃至形状。

2.1.1 正弦波及其基本参数

工程里最常用的信号形式是**正弦波**：

$$s(t) = A\sin(2\pi ft + \varphi)$$

公式里有三个参数：振幅 A、频率 f、相位 φ。本节只讲前两个，相位留到后续章节再展开。既然暂时不考虑相位，一切从简，公式可以简化成：

$$s(t) = A\sin(2\pi ft)$$

振幅 A 描述信号的强弱，即波形偏离零点的最大距离，单位通常是伏特（V）。振幅越大，信号能量越强，雷达发射功率越大，理论上探测距离就越远（具体见第 4 章雷达方程）。

频率 f 描述信号每秒完整起伏的次数，单位是赫兹（Hz），1 Hz 就是每秒起伏 1 次。频率的倒数是**周期** $T = 1/f$，表示完成一次完整起伏所需的时间。

举个例子：弹簧上挂一个重物，拉开后放手，重物上下振动。从最高点 → 平衡位置 → 最低点 → 平衡位置 → 最高点，走完这一圈就是一个周期 T。如果 个过程用了 0.5 秒，频率就是 $f = 1/0.5 = 2\,\mathrm{Hz}$，每秒能完成两次这样的振动。

下图画出了 2 Hz、5 Hz、10 Hz 三条正弦波。注意看最上面一行：2 Hz 的波形在 1 秒内只完成了两次起伏，周期 $T = 0.5\,\mathrm{s}$，波形舒缓。再看最下面一行：10 Hz 在同样的 1 秒里挤进了 10 次起伏，波形密得多。频率越高，同一段时间里" 塞进去" 的振动次数越多。

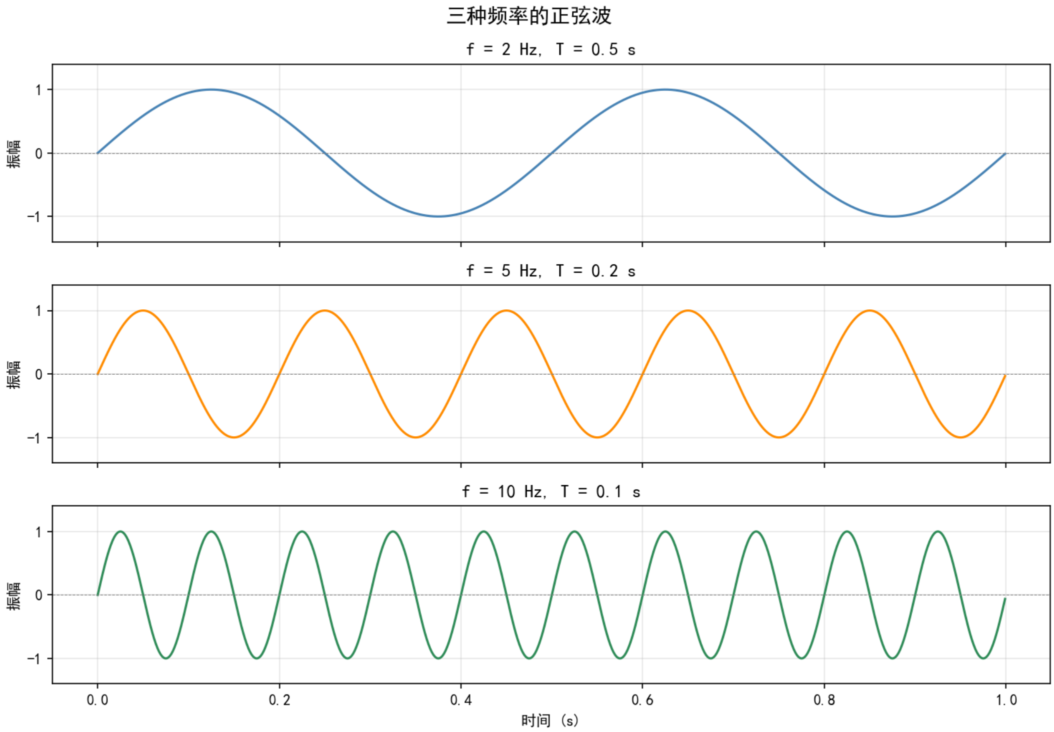

图 1: 图 2.1 三种频率的正弦波

数学上可以证明，任何形状的周期信号都能分解成若干正弦波的叠加。这个结论叫傅里叶定理，也是正弦波在工程里被反复使用的根本原因。你可能会想：为什么不用方波或三角波做基本单元？因为方波本身就可以分解成无穷多个正弦波的叠加。正弦波是" 不可再分" 的最小振动模式（当然余弦也行，只是相位 90°），用它做基底才能保证分解的唯一性。下一节从这里展开。

顺带提一个记号问题：公式里的 $2\pi f$ 经常被写成一个字母 ω，叫**角频率**，单位是 rad/s（弧度每秒）。两者的关系是 $\omega = 2\pi f$。你在其他教材里会频繁遇到 ω，知道它和 f 只差一个 2π 的倍数就够了，后续章节我们统一用 f。

2.1.2 频率在雷达中的作用

电磁波在空间传播时，相邻两个波峰之间的距离叫**波长** λ，它和频率的关系是：

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$c \approx 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$ 是光速。频率越高，波长越短，这一点带来三个实际影响。

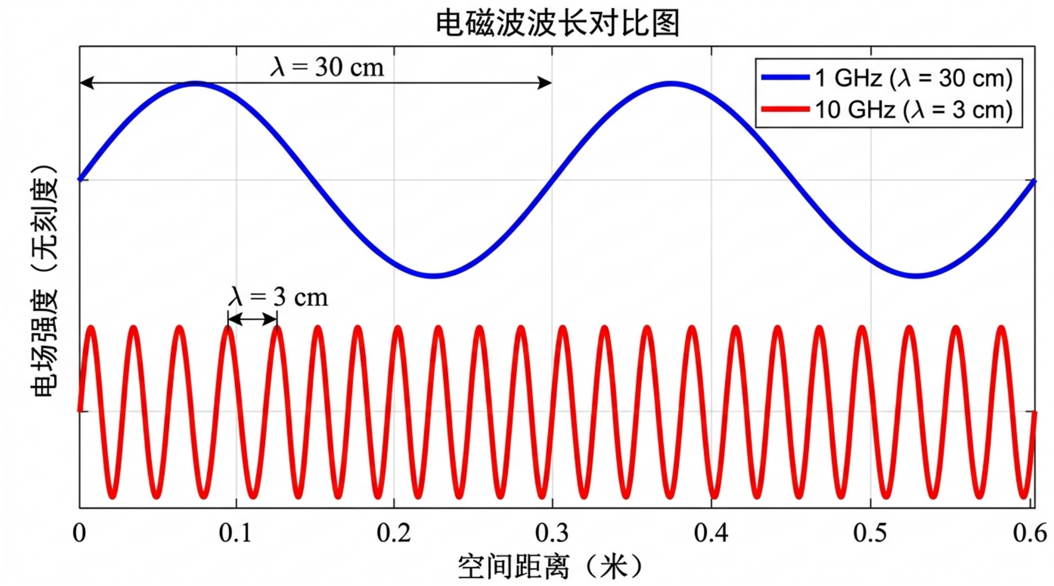

图 2: 电磁波波长示意图

波长越短，雷达分辨细小目标的能力越强。毫米波雷达波长约 1–10 mm，能看清车道线；米波雷达波长约 1 m，只适合探测大型目标。

低频电磁波绕射能力强，能翻越山丘、穿过云层；高频方向性好，但容易被雨水和水汽衰减。实际雷达的工作频段，是在这两者之间做权衡。

这东西就像是显示屏的分辨率一样，4K 看上去就是比 1080p，更加清晰，能看到更多的细节。

目标运动时，回波的频率会发生轻微偏移——靠近时频率升高，就像迎面而来的救护车鸣笛声变尖。雷达靠检测这个频率差来测量目标速度，具体原理见第 5 章。

2.1.3 复合信号与频率成分

雷达回波很少是单纯的正弦波。不同距离、不同速度的目标各贡献一个频率成分，混在一起返回接收机。

下图把 3 Hz（振幅 1.0）、7 Hz（振幅 0.6）、15 Hz（振幅 0.3）三个正弦波画在同一张图里。三条细线是各自的分量，红色粗线是它们相加后的复合信号。可以看到，复合信号的波形忽高忽低、毫无规律可言——仅凭肉眼几乎猜不出它是由三个频率合成的。

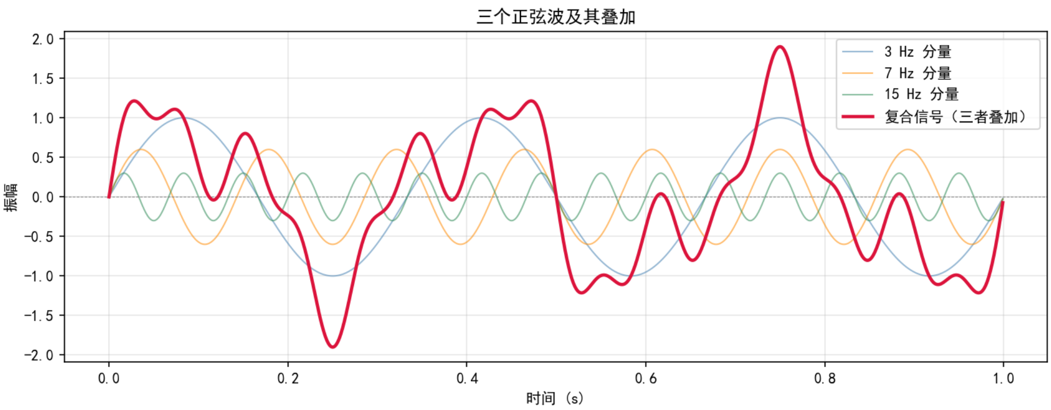

图 3: 图 2.2 三个正弦波及其叠加

这样的复合信号，怎么看出里面藏了哪些频率？这个问题引出了频域分析，下一节从这里出发。

2.2 时域与频域

上一节末尾留了一个问题：把 3 Hz、7 Hz、15 Hz 三个正弦波叠加之后，得到一条看起来杂乱的波形。怎么从这条曲线里看出它是由哪些频率构成的？

答案是换一个角度看同一个信号。

2.2.1 时域描述与频域描述

同一个信号可以用两种方式描述，就像同一栋楼可以从正面看，也可以从侧面看。

时域是我们最熟悉的视角：横轴是时间，纵轴是信号的值。心电图、录音波形、示波器屏幕上的曲线，都是时域的表示。它回答的问题是：这个信号在某一刻的值是多少？

频域换了一个角度：横轴是频率，纵轴是该频率成分的强度。它回答的问题是：这个信号里有哪些频率，各占多大比重？

两种描述携带的信息完全等价——没有任何信息丢失，只是呈现方式不同。选择哪种视角，取决于你想回答什么问题。

2.2.2 时域到频域的转换

还是上一节那三个分量：3 Hz（振幅 1.0）、7 Hz（振幅 0.6）、15 Hz（振幅 0.3）。下面这张四宫格图把时域和频域的对应关系摆在一起。

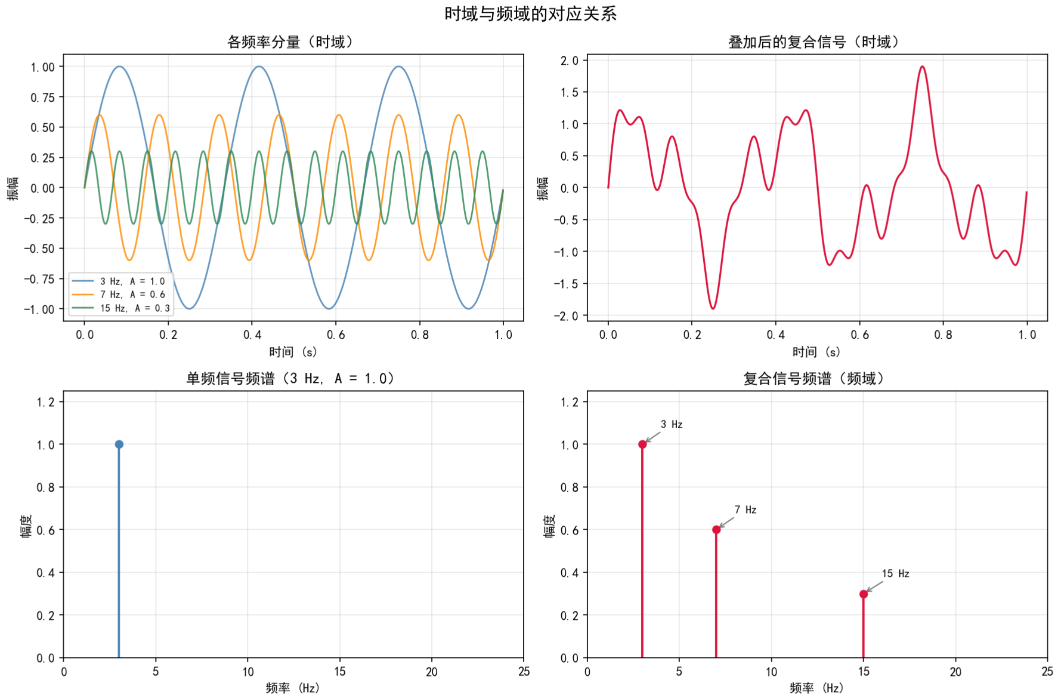

图 4: 图 2.3 时域与频域的对应关系

先看上面一行。左上是三条分量各自的时域波形，颜色不同，节奏不同，这一步还分得清楚。右上是它们相加后的复合信号——和上一节图 2.2 一样，杂乱无章。

再看下面一行。左下是单独一个 3 Hz 正弦波的频域：整张图只有一根谱线，立在 3 Hz 的位置，高度等于振幅 1.0。一个纯正弦波在频域里就是这么干净——一根线，没有任何多余的成分。

右下是复合信号的频域：三根竖线分别立在 3、7、15 Hz 的位置，高度正好是 1.0、0.6、0.3。上面时域里那条杂乱的波形，到了频域里结构完全暴露——三个分量的频率和强度一目了然。

2.2.3 傅里叶变换

从时域波形计算出频域频谱，用的工具叫**傅里叶变换**（Fourier Transform）。反过来，从频谱还原时域波形，叫**傅里叶逆变换**。

傅里叶变换实现的数学的细节不是本节的重点，读者可以去看奥本海姆的信号与系统补补基础，或者网上找个短平快的教程。你现在只需要建立一个直觉：傅里叶变换做的事情，就像把一束白光送入棱镜，白光看起来是一种颜色，经过棱镜折射之后分解成红橙黄绿蓝紫，每种颜色对应一个频率。傅里叶变换对信号做的，正是这件事。

实际计算中用的是离散版本，叫**快速傅里叶变换**（FFT，Fast Fourier Transform），计算效率极高。

2.2.4 频域分析在雷达中的作用

雷达接收到的回波是一个时域信号：振幅随时间变化的电压。但雷达想知道的不是”此刻电压是多少”，而是”回波里有没有某个特定频率，有多强”。

目标的距离信息藏在回波的**时间延迟**里——回波比发射信号晚了多少时间，就对应多远的距离。延迟是时间轴上的位移，时域分析直接可读。

目标的速度信息藏在回波的**频率偏移**里——运动目标让回波频率相对发射频率发生轻微变化（多普勒效应）。这个偏移在时域波形里几乎看不出来，但在频域里是一根谱线的位移，一目了然。

这也是为什么雷达信号处理要在两个视角之间来回切换：距离用时域，速度用频域，各有各的用武之地。

2.2.5 频率分辨率

频谱图上能分开两根相邻谱线的最小间距，叫**频率分辨率**，记作 Δf。它和观测时间 T_{obs} 之间有一个简单的关系：

$$\Delta f \approx \frac{1}{T_{\mathrm{obs}}}$$

观测 1 秒，能分辨 1 Hz 的差异；观测 0.1 秒，只能分辨 10 Hz 的差异——观测时间越长，能分辨的频率间距越小，分辨能力越精细。

如果你只听了一个声音 0.01 秒，很难判断它是 440 Hz 还是 441 Hz；但如果听了 1 秒，两个音高的差别就能分辨出来。

这个限制在雷达里有实际影响：观测目标的时间越长，测速精度越高，但代价是雷达需要持续照射目标更长时间。时间和频率之间存在一个基本的权衡关系，第 4 章讨论脉冲压缩时还会回到这一点。

到这里，我们一直在讨论连续信号——信号在每一个时刻都有值。但计算机处理不了连续信号，必须把它变成一串离散的数字。怎么变？变的时候会丢信息吗？下一节回答这个问题。

2.3 采样定理

前两节讨论的正弦波、叠加、频谱，都是在”连续时间”的框架下说的：信号在每一个时刻都有值，时间轴是一条不间断的实数轴。

但计算机没法处理连续信号。计算机只能存数字，存一个就是一个，存不了无穷多个。要让计算机处理信号，必须把连续信号变成一串离散的数值——这个过程叫**采样**。

采样的操作很简单：每隔固定时间取一个点，记录下那一刻的信号值，其余时刻全部丢弃。问题是：丢了那么多信息，还能还原出原来的信号吗？

2.3.1 采样率和奈奎斯特条件

每秒取多少个点，就是**采样率** f_s，单位 Hz。

采样率越高，还原越准确，但存储和传输都有成本。那最低需要多高？

采样定理（也叫奈奎斯特–香农定理）给出了底线：

$$f_s > 2f_{\max}$$

$f_{\max}$ 是信号中包含的最高频率分量。采样率只要严格大于最高频率的两倍，信号就能被完整还原，不丢失任何信息。

$f_s/2$ 这个分界线有个专门的名字，叫**奈奎斯特频率**。采样率 1000 Hz 对应的奈奎斯特频率就是 500 Hz——意味着这个采样率最多能正确捕捉 500 Hz 以下的信号成分。

2.3.2 采样不足与混叠

下图对一个 10 Hz 正弦波做了三种采样率的实验。灰色线是原始信号，橙色圆点是采样点，蓝色虚线是从采样点重建出来的波形。从上到下依次看：

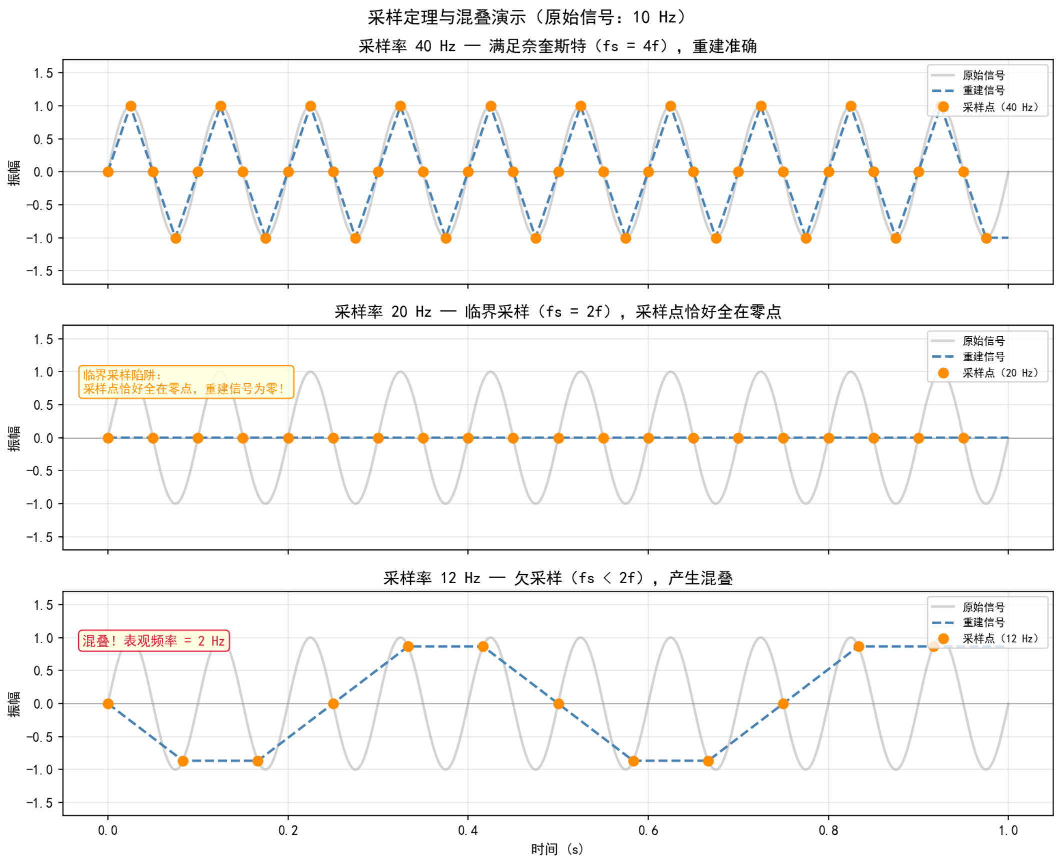

图 5: 图 2.4 采样定理与混叠演示

第一行，40 Hz 采样（$f_s = 4f$）。远超奈奎斯特条件，橙色采样点足够密，蓝色重建波形和灰色原始信号几乎完全重合。

第二行，20 Hz 采样（$f_s = 2f$）。刚好踩在临界线上。按理论说 $f_s > 2f$ 才行，这里是等于而不是大于。结果很有意思：$\sin(2\pi \cdot 10 \cdot n/20) = \sin(n\pi) = 0$，每个采样点恰好落在正弦波的零点上，重建出来的信号是一条零线。信号完全消失了。

这个例子说明"等于"不行，必须"大于"——临界采样在特定相位下会彻底失效。

第三行，12 Hz 采样（$f_s < 2f$）。采样率低于奈奎斯特要求，发生了**混叠**（aliasing）：看蓝色虚线，重建出来的波形不再是 10 Hz，而变成了一个缓慢起伏的 2 Hz 低频信号。原始的高频信号被"伪装"成了一个不存在的低频信号。

混叠频率有一个简单的计算关系：$f_{\text{alias}} = f_s - f_{\text{signal}} = 12 - 10 = 2\,\text{Hz}$。

混叠一旦发生就无法挽回——你没办法从已有的采样数据中分辨出那个 2 Hz 到底是"真的 2 Hz 信号"还是"10 Hz 被混叠下来的假象"。这就是为什么采样率必须满足奈奎斯特条件，没有余地可以打折。

混叠在生活中经常能观察到，电影里汽车轮毂看起来"倒转"，就是视觉采样率（每秒 24 帧）不够高，轮辐的旋转频率超过了奈奎斯特频率，高频运动被混叠成低频的反向旋转。

荧光灯下用手机拍屏幕出现滚动条纹，也是类似的道理：手机快门频率和屏幕刷新频率之间的关系不满足采样条件，导致出现虚假的低频图案。

2.3.3 模数转换

雷达接收机里有一个关键器件叫**模数转换器**（ADC，Analog-to-Digital Converter），它的工作就是对回波信号做采样——把连续的模拟电压变成离散的数字序列，交给后续的数字信号处理器。

ADC 的采样率直接决定了雷达能处理多大带宽的信号。如果雷达发射的信号带宽是 50 MHz，ADC 的采样率至少需要 100 MHz 以上。高采样率的 ADC 很贵，功耗也大，这是雷达设计中的一个现实约束。

另一个实际问题是：采样率越高，每秒产生的数据量越大，对存储和实时处理的要求也越高。所以雷达工程师不是简单地把采样率拉到最高，而是根据信号带宽选择"刚好够用再留一点余量"的采样率。

2.4 小练习

这些练习覆盖本章的三个核心概念：正弦波参数、时域与频域的关系、采样定理。建议先自己做，再对照解析检查思路。

2.4.1 练习 1：频率与周期的换算

问题：一个正弦信号的周期是 $T = 0.02\,\text{s}$，它的频率是多少？这个频率在人耳可听范围内吗（人耳可听范围约 20 Hz - 20000 Hz）？

解析：由 $f = 1/T$ 可得

$$f = \frac{1}{0.02} = 50\,\mathrm{Hz}$$

50 Hz 在人耳可听范围内，是一个比较低的频率。日常生活中的交流电频率就是 50 Hz，因此有时能听到设备发出的低频嗡嗡声。

2.4.2 练习 2：从频谱读信息

问题：某信号的频谱图上有两根谱线：一根在 100 Hz 处，高度 3 V；另一根在 250 Hz 处，高度 1 V。

（a）写出这个信号的时域表达式（忽略相位）。

（b）如果要对这个信号采样，采样率至少要多高？

如果你想把这道题和图联系起来看，可以直接运行 `ch02_exercise_signals.m` 中练习 2 的部分，对照频谱图反推时域表达式。

解析：频谱中的每一根谱线都对应一个正弦分量，因此时域信号可以写成

$$s(t) = 3\sin(2\pi \cdot 100 \cdot t) + 1\sin(2\pi \cdot 250 \cdot t)$$

这个信号的最高频率分量是 250 Hz。根据采样定理，采样率必须满足

$$f_s > 2f_{\max} = 2 \times 250 = 500\,\mathrm{Hz}$$

因此采样率至少要大于 500 Hz。实际工程中通常会留一点余量，例如取 600 Hz 或 1000 Hz。

2.4.3 练习 3：混叠判断

问题：你用 800 Hz 的采样率对一个信号采样。信号里包含三个频率分量：100 Hz、300 Hz、500 Hz。哪些分量会发生混叠？混叠后会表现为什么频率？

可直接运行 `ch02_exercise_signals.m` 中练习 3 的部分，重点观察 500 Hz 分量如何折叠到 300 Hz。

解析： 800 Hz 采样率对应的奈奎斯特频率为

$$\frac{f_s}{2} = 400\,\mathrm{Hz}$$

因此，100 Hz 和 300 Hz 都低于 400 Hz，不会发生混叠；500 Hz 高于 400 Hz，会发生混叠。混叠后的表观频率为

$$f_{\text{alias}} = f_s - f_{\text{signal}} = 800 - 500 = 300\,\mathrm{Hz}$$

也就是说，500 Hz 分量会折叠到 300 Hz 处，并和原本就存在的 300 Hz 分量重合。这样不仅会出现假象，还会把原来的 300 Hz 分量一起污染掉。

2.4.4 练习 4：雷达场景计算

问题：一部雷达发射频率为 10 GHz 的电磁波。

（a）这个信号的波长是多少？（$c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$）

（b）如果目标以 30 m/s 的速度靠近雷达，回波频率是升高还是降低？只需定性回答，不必计算具体数值。

解析：波长由

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

计算，因此

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{10 \times 10^9} = 0.03\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{cm}$$

这属于 X 波段雷达常见的波长范围。

当目标向雷达靠近时，回波频率会升高。原因和救护车靠近时鸣笛声变尖是一样的：波源与观察者相对靠近，波被压缩，频率上升。

2.4.5 练习 5（动手题）：观察混叠现象

问题：运行 `ch02_exercise_signals.m` 中练习 5 的代码，观察 7 Hz 采样 5 Hz 信号时的波形结果。这个场景下，混叠后的表观频率是多少？和图中结果是否一致？

这道题最好直接动手运行 `ch02_exercise_signals.m`。先自己算出结果，再看图里重建波形的频率是否和你的计算一致。

解析：混叠频率可按

$$f_{\text{alias}} = f_s - f_{\text{signal}}$$

计算，因此

$$f_{\text{alias}} = 7 - 5 = 2\,\mathrm{Hz}$$

所以图中重建出来的波形应表现为一个 2 Hz 的低频信号，而不是原来的 5 Hz 信号。若你运行 `ch02_exercise_signals.m`，会看到图形结果与这个结论一致。

2.4.6 练习 6：频率分辨率

问题：雷达对一个目标连续观测了 0.05 秒。目标回波中可能包含两个多普勒频率分量：1000 Hz 和 1015 Hz。这两个分量在频谱上能分开吗？如果不能，至少需要观测多长时间？

解析：频率分辨率近似为

$$\Delta f = \frac{1}{T_{\text{obs}}}$$

代入观测时间 $T_{\text{obs}} = 0.05\,\text{s}$，得到

$$\Delta f = \frac{1}{0.05} = 20\,\text{Hz}$$

而两个频率分量只相差 15 Hz，小于 20 Hz，因此在当前观测时间下分不开。

如果要把 15 Hz 的差别分辨出来，就需要满足

$$T_{\text{obs}} \geq \frac{1}{15} \approx 0.067\,\text{s}$$

也就是至少需要大约 67 ms 的观测时间。

2.4.7 练习 7：临界采样不总是归零

问题： 2.3 节演示了 $f_s = 2f$、初始相位为零时，采样点全落在零点上。现在换一个情况：信号

$$s(t) = \sin(2\pi \cdot 10 \cdot t + \pi/4)$$

仍用 20 Hz 采样。采样值还会全是零吗？这个信号能被正确重建吗？

解析： 把 $t = n/20$ 代入原式，可得

$$s\left(\frac{n}{20}\right) = \sin(n\pi + \pi/4)$$

当 n 为偶数时，采样值为

$$\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

当 n 为奇数时，采样值为

$$\sin(\pi + \pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因此采样值不再全是零，而是在 $\pm\sqrt{2}/2$ 之间交替出现。

但这并不表示信号已经被正确重建。因为在临界采样条件 $f_s = 2f$ 下，采样值并不能唯一对应原始连续信号。也就是说，虽然采样点不全为零，但原信号依然不能被稳定、唯一地恢复出来。这正是采样定理要求 f_s 必须严格大于 $2f$ 的原因。