

易懂的雷达信号处理

面向学生与工程师

第五章：速度测量

作者：唐承乾

版本：社区版 V1

官方仓库：<https://github.com/apple-art/easy-radar-tutorial>

权利声明：本资料为《易懂的雷达信号处理》社区版 V1，仅供个人学习、教学交流与非商业分享使用。作者保留全部著作权；未经授权，请勿擅自商用、删改署名或再版传播。

目录

5.1 多普勒效应原理	1
5.2 多普勒频移与速度换算	4
5.2.1 速度与多普勒频移的关系	4
5.2.2 多普勒频移的测量方法	5
5.2.3 速度分辨率与速度模糊	6
5.3 脉冲间相位变化与速度测量	9
5.3.1 脉冲间相位差	9
5.3.2 相位差法与慢时间 FFT	11
5.3.3 慢时间序列的复指数模型	11
5.3.4 FFT 的模板匹配机制	12
5.3.5 从相位变化速率到多普勒频率	14
5.4 MTD 的基本思想	15
5.4.1 慢时间处理与速度提取	15
5.4.2 距离-速度图的表示	17
5.4.3 附录：脉冲压缩后慢时间相位关系的证明	19
5.5 实际应用	20
5.5.1 应用 1：交警测速枪	20
5.5.2 应用 2：气象雷达测风速	20
5.5.3 应用 3：汽车防撞雷达	21
5.5.4 实际系统面对的问题	22
5.6 小练习	23
5.6.1 练习 1：基础计算	23
5.6.2 练习 2：测速枪的角度误差	23
5.6.3 练习 3：速度分辨率	24
5.6.4 练习 4：最大可测速度	24
5.6.5 练习 5：气象雷达的风速测量	24
5.6.6 练习 6：综合应用	25
5.6.7 练习 7：编程实践（可选）	25
5.6.8 思考题	26

第 4 章解决的是“目标离我多远”，这一章要继续往前走一步：目标是在靠近、远离，还是根本没怎么动？如果它在动，速度又是多少？

这件事的入口是多普勒效应。你在日常生活里已经听过它，比如救护车迎面开来时声音变尖，开过去以后声音变低。第 5 章就是把这个熟悉的现象，一步一步变成雷达里的测速方法。不过这里真正要学的，不只是“有一个公式可以把频移换成速度”，而是要把整条测速链条看清楚：为什么会有频移，怎么把频移测出来，在脉冲雷达里它又为什么会表现成脉冲间的相位变化。

这一章我建议你这样分轻重：

核心内容（必须掌握）：

- 5.1: 多普勒效应为什么会出现在，它和径向速度是什么关系
- 5.2: 测到频率偏移以后，怎样换算成目标速度
- 5.3: 在脉冲雷达里，速度信息为什么会体现在脉冲间相位变化上
- 5.5: 把前面的原理放回测速枪、气象雷达、汽车雷达这些真实场景里，建立工程直觉

提高内容（先知道主旨即可）：

- 5.4: MTD 的基本思想。第一遍读时，重点放在“为什么要沿慢时间做处理”，不必急着把二维处理细节一次吃完

巩固内容：

- 5.6: 小练习，用来检验你能不能把“多普勒频移 → 速度”这条链条自己走一遍

5.1 多普勒效应原理

站在路边，救护车从远处驶来，鸣笛声越来越尖；车开过去后，声音又变得低沉。这个现象每个人都经历过，它有个专门的名字：**多普勒效应**。

雷达测速的原理就是多普勒效应。目标运动时，回波的频率会发生偏移：靠近时频率升高，远离时频率降低。测量这个频率偏移，就能算出目标的速度。

先从声音说起，因为声音的多普勒效应最容易感受。声音是空气的振动。声源（比如救护车的喇叭）每秒发出若干次振动，这个次数就是频率 f 。声波以固定速度 $v_s \approx 340 \text{ m/s}$ 在空气中传播。

假设救护车静止不动，喇叭发出频率 $f_0 = 1000 \text{ Hz}$ 的声音。这意味着每秒有 1000 个波峰从喇叭发出，均匀分布在空间中。相邻两个波峰之间的距离就是波长 $\lambda = v_s/f_0 = 0.34 \text{ m}$ 。

现在让救护车以速度 v 向你驶来。喇叭还是每秒发出 1000 个波峰，但因为车在运动，后一个波峰发出时，车已经向前移动了一小段距离。这导致波峰之间的间距被“压缩”了。你站在路边不动，单位时间内经过你的波峰数量变多了——频率升高了。

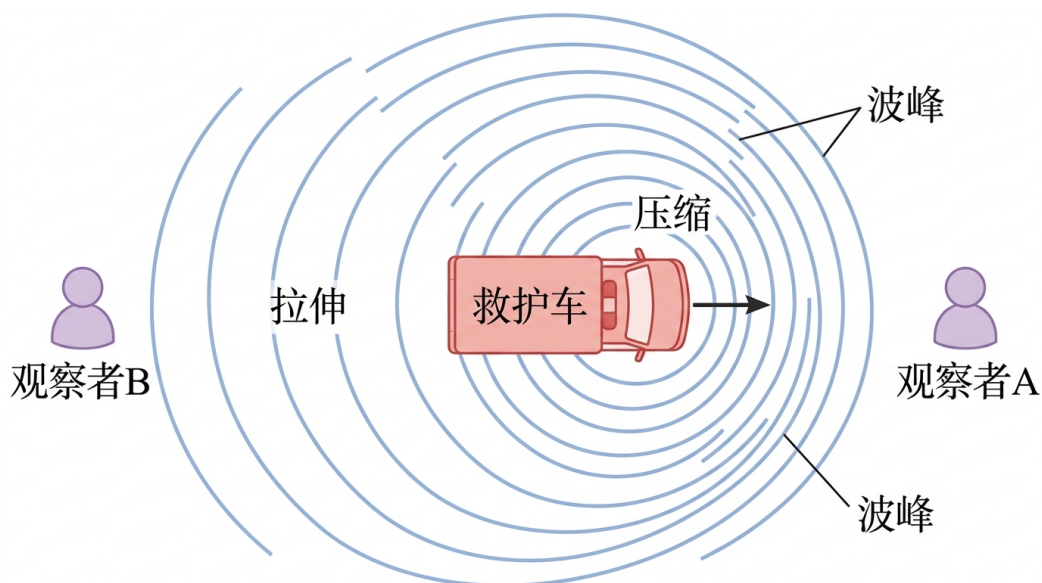


图 1: 多普勒效应: 波峰的压缩与拉伸

上图展示了这个过程：救护车向右运动，不断发出声波。前方的波峰被”挤”在一起（标注”压缩”），后方的波峰被”拉”开（标注”拉伸”）。观察者 A 在前方听到高音，观察者 B 在后方听到低音。

频率到底变化了多少？来算一下。救护车静止时，相邻两个波峰之间的距离（波长）是 $\lambda_0 = v_s / f_0 = 0.34 \text{ m}$ 。现在车以速度 v 向你驶来，喇叭每隔 $1/f_0$ 秒发出一个波峰。在这段时间里，前一个波峰已经向前传播了 v_s/f_0 ，但车本身也向前移动了 v/f_0 。所以两个波峰之间的实际距离变成了：

$$\lambda = \frac{v_s - v}{f_0}$$

波长被压缩了。你站在路边不动，声波以速度 v_s 经过你，单位时间内经过的波峰数（频率）就是：

$$f = \frac{v_s}{\lambda} = f_0 \frac{v_s}{v_s - v}$$

举个例子：救护车以 $v = 30 \text{ m/s}$ (约 108 km/h) 向你驶来，喇叭频率 $f_0 = 1000 \text{ Hz}$ ，你听到的频率是：

$$f = 1000 \times \frac{340}{340 - 30} \approx 1097 \text{ Hz}$$

频率升高了约 97 Hz ，声音变尖了。

车开过去后，速度变成 $v = -30 \text{ m/s}$ (远离)，频率变成：

$$f = 1000 \times \frac{340}{340 + 30} \approx 919 \text{ Hz}$$

频率降低了约 81 Hz, 声音变低沉了。

雷达发射的是电磁波, 不是声波, 但多普勒效应的原理完全一样。唯一的区别是: 电磁波的传播速度是光速 $c = 3 \times 10^8$ m/s, 比声速快得多。

假设雷达发射频率为 f_0 的电磁波, 目标以速度 v 向雷达运动。回波的频率会发生偏移:

$$f = f_0 \frac{c + v}{c - v}$$

这个公式看起来复杂, 但实际应用中目标速度 v 远小于光速 c (即使是超音速飞机, v/c 也只有百万分之一), 可以做近似:

$$f \approx f_0 \left(1 + \frac{2v}{c} \right)$$

频率偏移 $\Delta f = f - f_0$ 就是:

$$\Delta f \approx \frac{2v}{c} f_0$$

这里的因子 2 是因为电磁波往返两次: 雷达到目标一次, 目标到雷达又一次, 每次都产生一次多普勒效应, 所以总的频率偏移是单程的两倍。

多普勒效应有个重要特点: 频率偏移的方向取决于目标的运动方向。目标靠近雷达时回波频率升高 ($\Delta f > 0$), 远离时频率降低 ($\Delta f < 0$), 横向运动 (垂直于雷达视线) 时回波频率不变 ($\Delta f = 0$)。最后一点很重要: 多普勒效应只对**径向速度**敏感, 即目标沿雷达视线方向的速度分量。如果目标横向飞过, 即使速度很快, 雷达也测不出多普勒频移。

如果你想逗一个雷达, 可以沿着它转圈圈, 没有朝向它的速度, 它看你就是速度为 0, 要是雷达不能测角的话, 你就是隐身的。

举个例子: 一架飞机以 300 m/s 的速度飞行, 但飞行方向与雷达视线成 60° 角。雷达测到的径向速度只有 $v_r = 300 \times \cos(60^\circ) = 150$ m/s。多普勒频移是按 150 m/s 计算的, 不是 300 m/s。

来算几个实际例子, 建立直观感受。

例 1: 汽车测速雷达

- 雷达频率: $f_0 = 24$ GHz (毫米波雷达常用频段)
- 汽车速度: $v = 30$ m/s (约 108 km/h)
- 频率偏移:

$$\Delta f = \frac{2 \times 30}{3 \times 10^8} \times 24 \times 10^9 = 4800 \text{ Hz} = 4.8 \text{ kHz}$$

频率偏移是 4.8 kHz, 这个频率落在音频范围内, 用普通的音频处理芯片就能测量。

例 2: 气象雷达

- 雷达频率: $f_0 = 3$ GHz (S 波段)
- 云团移动速度: $v = 10$ m/s (约 36 km/h)

- 频率偏移:

$$\Delta f = \frac{2 \times 10}{3 \times 10^8} \times 3 \times 10^9 = 200 \text{ Hz}$$

频率偏移只有 200 Hz, 需要更精密的测量。

例 3: 战斗机雷达

- 雷达频率: $f_0 = 10 \text{ GHz}$ (X 波段)
- 目标速度: $v = 600 \text{ m/s}$ (约 2 马赫)
- 频率偏移:

$$\Delta f = \frac{2 \times 600}{3 \times 10^8} \times 10 \times 10^9 = 40000 \text{ Hz} = 40 \text{ kHz}$$

频率偏移达到 40 kHz, 测量相对容易, 但需要更高的采样率。

从这些例子可以看出: 雷达频率越高, 目标速度越快, 多普勒频移越大。这也是为什么高速目标探测通常使用高频雷达。

多普勒效应不只用于雷达。天文学中, 恒星光谱的红移/蓝移揭示了恒星的运动方向和速度, 宇宙膨胀的证据就来自遥远星系的红移。5.5 节会介绍测速枪、气象雷达、汽车防撞雷达等工程应用。

5.2 多普勒频移与速度换算

上一节介绍了多普勒效应的原理: 目标运动导致回波频率发生偏移。这一节解决实际问题: 如何从测量到的频率偏移 Δf 反推出目标速度 v ?

5.2.1 速度与多普勒频移的关系

从上一节的多普勒公式出发:

$$\Delta f = \frac{2v}{c} f_0$$

解出速度 v :

$$v = \frac{c\Delta f}{2f_0}$$

这就是雷达测速的核心公式。只要测出频率偏移 Δf , 就能算出目标的径向速度 v 。

公式里的三个量:

- $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$: 光速, 常数
- f_0 : 雷达发射频率, 设计时确定
- Δf : 测量得到的频率偏移

关键点：速度测量的精度完全取决于频率测量的精度。频率测得越准，速度就越准。

假设交警使用的测速雷达工作在 24 GHz 频段，测得回波的频率偏移是 $\Delta f = 4800$ Hz。目标速度是多少？代入公式： $v = (3 \times 10^8 \times 4800) / (2 \times 24 \times 10^9) = 30$ m/s，换算成 km/h 是 108 km/h。这个计算过程在实际雷达中是自动完成的。雷达内部的信号处理器测量频率偏移，然后用上面的公式实时计算速度，显示在屏幕上。

5.2.2 多普勒频移的测量方法

理论上公式很简单，但实际测量频率偏移并不容易。回波信号极其微弱，淹没在噪声中，如何精确测出频率？最常用的方法是混频 + FFT。

先说混频。雷达发射频率通常在 GHz 量级（比如 24 GHz），而多普勒频移只有几 kHz。如果直接对 24 GHz 的信号做 FFT，需要极高的采样率（根据采样定理，至少 48 GHz），这在硬件上很难实现，成本也极高。混频的作用是降频：把高频的回波信号和发射信号相乘，得到它们的差频。

数学上，混频利用三角函数的乘法公式。假设发射信号是 $s_{tx}(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ，回波信号是 $s_{rx}(t) = \cos(2\pi(f_0 + \Delta f)t)$ ，两者相乘得到：

$$s_{tx}(t) \times s_{rx}(t) = \cos(2\pi f_0 t) \times \cos(2\pi(f_0 + \Delta f)t)$$

根据三角函数乘法公式 $\cos A \times \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$ ，展开后得到：

$$= \frac{1}{2}[\cos(2\pi \Delta f \cdot t) + \cos(2\pi(2f_0 + \Delta f)t)]$$

乘积包含两个频率成分：差频 Δf （几 kHz）和和频 $2f_0 + \Delta f$ （约 48 GHz）。用一个低通滤波器滤掉高频的和频项，就只剩下差频信号 $\cos(2\pi \Delta f \cdot t)$ 了。这个差频信号的频率就是多普勒频移 Δf ，可以用普通的音频 ADC 采样（几十 kHz 采样率就够了）。

接下来是 FFT。对差频信号做傅里叶变换（第 2 章介绍过），得到频谱。频谱的峰值位置就是多普勒频移 Δf 。最后用公式 $v = c\Delta f / (2f_0)$ 算出速度。

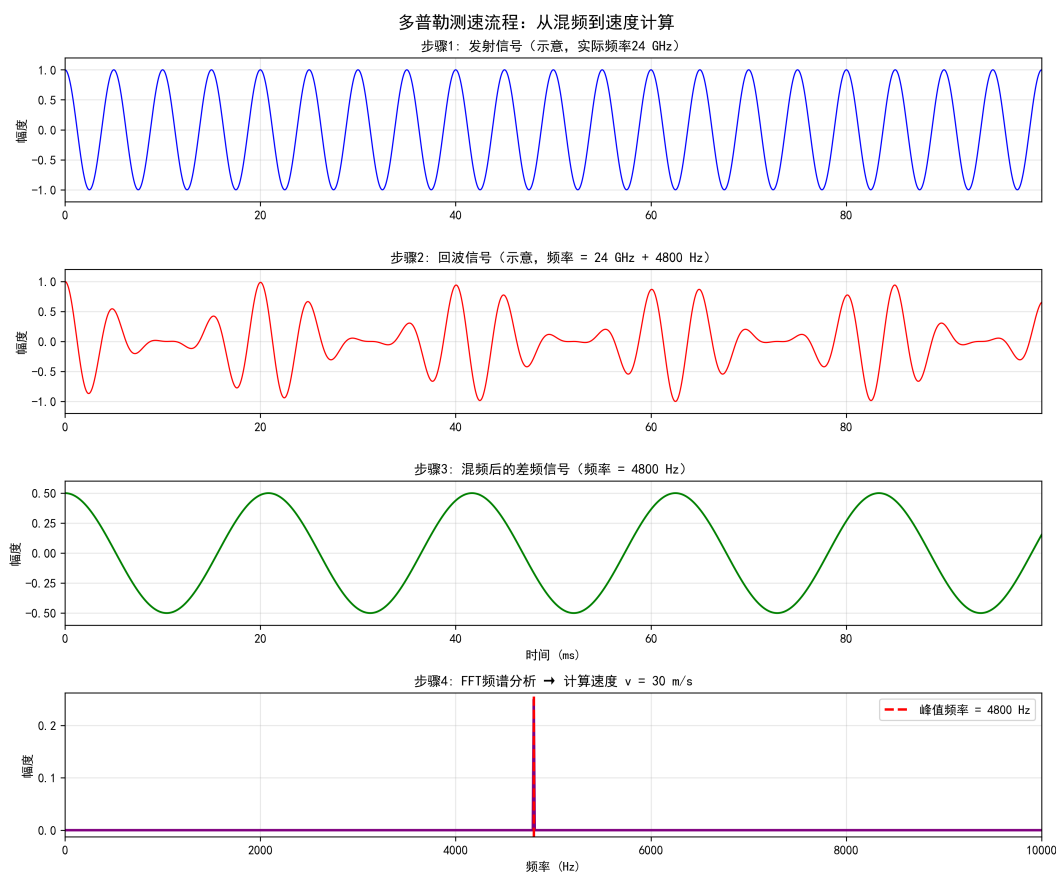


图 2: 频率测量流程

上图展示了完整流程：发射信号（蓝色）和回波信号（红色）混频后，得到低频的差频信号（绿色）。对差频信号做 FFT，频谱出现明显的峰值，峰值位置就是多普勒频移。这个技术叫**外差接收**，是无线电工程的基础技术，不只用于雷达，收音机、手机、WiFi 都用这个原理。

5.2.3 速度分辨率与速度模糊

就像距离测量有分辨率限制（第 4 章），速度测量也有分辨率限制。

速度分辨率取决于频率分辨率。回顾第 2 章的傅里叶变换：要分辨两个频率，需要足够长的观测时间。频率分辨率 Δf_{res} 与观测时间 T 成反比：

$$\Delta f_{\text{res}} = \frac{1}{T}$$

这个公式怎么来的？和采样率没有关系吗？做 FFT 时，假设采样率是 f_s ，采样点数是 N ，那么总观测时间 $T = N/f_s$ 。FFT 输出的频率点是均匀分布的，相邻两个频率点之间的间隔是：

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{f_s}{f_s \cdot T} = \frac{1}{T}$$

可以看到，频率分辨率只取决于观测时间 T ，与采样率无关。采样率决定的是能测量的最高频率 ($f_s/2$)，而不是频率分辨率。观测时间越长，频率分辨率越高。这个结论直接来自傅里叶

变换的性质：时间窗口越宽，频域分辨率越高。

对应的速度分辨率是多少？从速度公式 $v = c\Delta f/(2f_0)$ 出发，如果频率分辨率是 Δf_{res} ，那么速度分辨率就是：

$$\Delta v = \frac{c\Delta f_{\text{res}}}{2f_0} = \frac{c}{2f_0T}$$

举例：24 GHz 雷达，观测时间 $T = 0.1$ s，速度分辨率是：

$$\Delta v = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 24 \times 10^9 \times 0.1} = 0.625 \text{ m/s} \approx 2.25 \text{ km/h}$$

这意味着相差 2 km/h 以内的两个目标无法分辨。对于交通测速，2 km/h 的分辨率完全够用。但对于精密制导或科学测量，可能需要更高的分辨率，这就要求更长的观测时间。

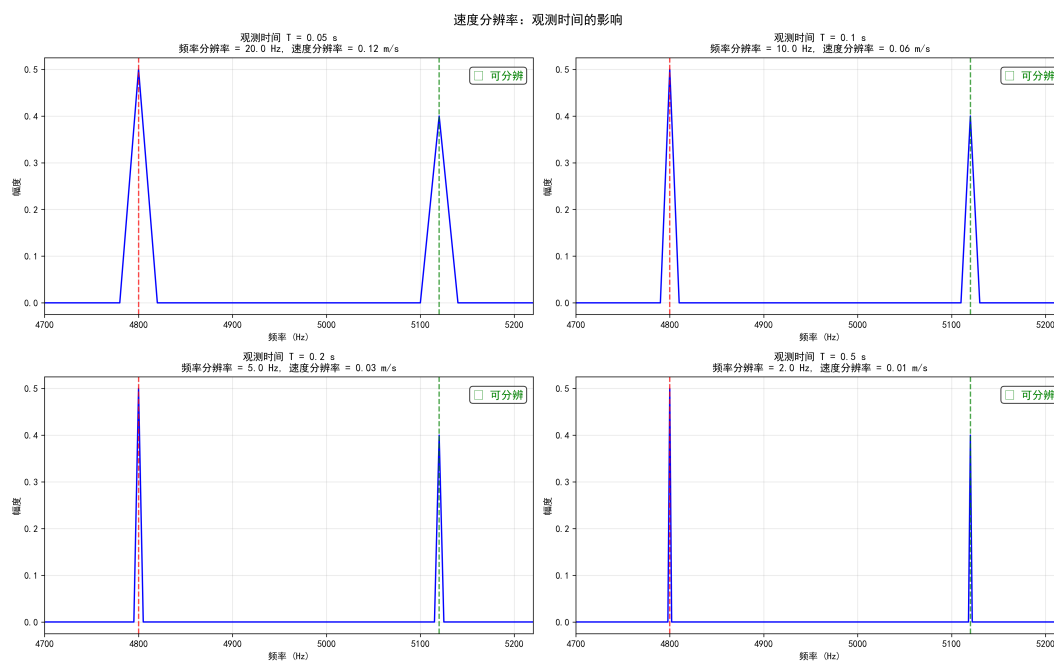


图 3: 速度分辨率示意图

上图展示了观测时间对速度分辨率的影响：观测时间越长，FFT 频谱的峰越窄，能分辨的速度差越小。

速度模糊是另一个实际问题。如果目标速度太快，多普勒频移可能超出测量范围，导致测量错误。

这个问题的根源是采样定理（第 2 章）。回顾采样定理：采样率 f_s 必须大于信号最高频率的两倍，否则会发生频谱混叠。对于多普勒雷达，如果采样率是 f_s ，能测量的最大频率偏移是 $f_s/2$ （奈奎斯特频率）。

对应的最大速度是：

$$v_{\text{max}} = \frac{c \cdot (f_s/2)}{2f_0} = \frac{cf_s}{4f_0}$$

超过这个速度，频率会”折叠”回来，导致测量错误。举例：24 GHz 雷达，采样率 $f_s = 20$ kHz，最大可测速度是：

$$v_{\max} = \frac{3 \times 10^8 \times 20000}{4 \times 24 \times 10^9} = 62.5 \text{ m/s} \approx 225 \text{ km/h}$$

如果目标速度超过 225 km/h，测量结果会出错。比如真实速度是 250 km/h，可能被测成 25 km/h (250 - 225 = 25)。

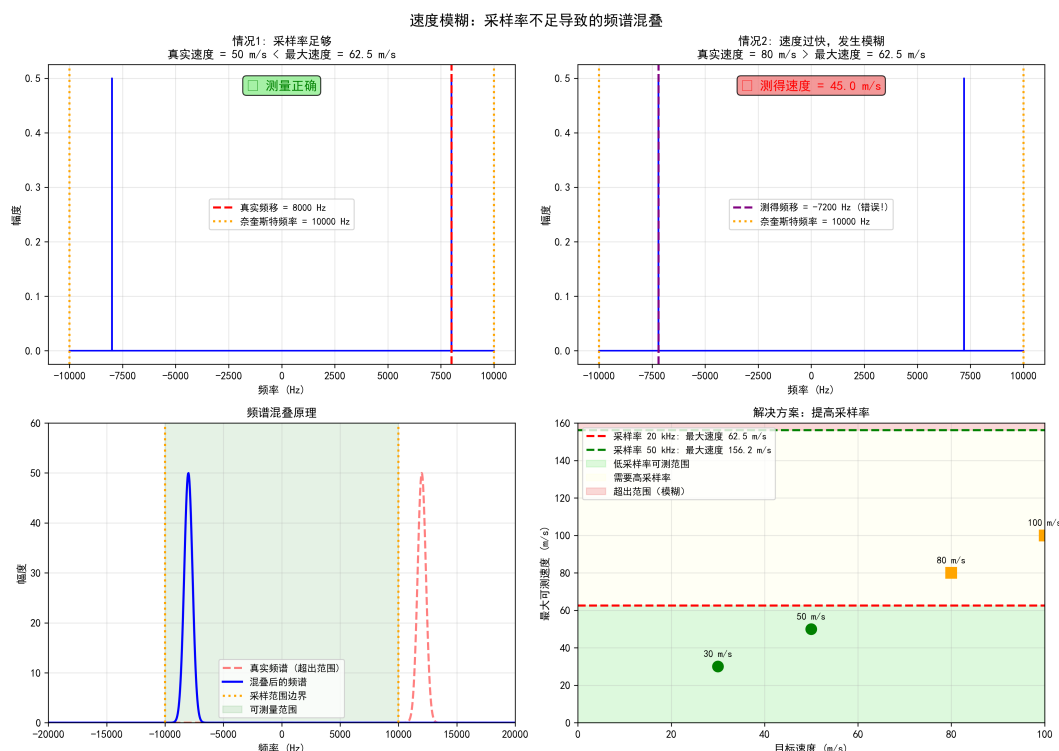


图 4: 速度模糊示意图

上图展示了速度模糊的原理：当多普勒频移超过奈奎斯特频率时，频谱会发生混叠，高速目标被误判为低速目标。

解决方法有两种：一是提高采样率，扩大可测速度范围；二是使用多个脉冲重复频率 (PRF) 交替测量，通过”解模糊”算法恢复真实速度。后者属于高级技术，本书不展开。

测速有两种基本方式。**连续波 (CW) 雷达**持续发射单频信号，同时接收回波，混频后直接得到多普勒频移。结构简单，成本低，但无法测距离（因为信号一直在发射，无法区分回波的时间延迟）。**脉冲多普勒雷达**发射脉冲串，每个脉冲之间有间隔，既能测距离（通过时间延迟），又能测速度（通过脉冲间的相位变化）。结构复杂，但功能完整。交警的测速枪通常是连续波雷达——只需要测速度，不需要测距离。而军用雷达、气象雷达通常是脉冲多普勒雷达——既要知道目标在哪里，又要知道它有多快。

到这里，速度测量的基本理论已经完整了：目标运动引起多普勒频移，测出频移以后，就可以由

$$v = \frac{c\Delta f}{2f_0}$$

换算出目标速度。

上面讲的连续波雷达结构简单，非常适合纯测速应用（比如测速枪）。但在实际雷达系统中，脉冲雷达更为常见——因为它既能测距离，又能测速度。对于脉冲雷达，速度信息不再表现为一段连续的差频信号，而是体现在相邻脉冲之间的相位变化中。下一节讨论的，正是这种脉冲体制下的测速原理：同样的多普勒频率，在脉冲串数据里是怎样出现的，又怎样沿慢时间方向把它提取出来。

5.3 脉冲间相位变化与速度测量

上一节主要站在连续波雷达的角度讨论测速：先把高频回波混到低频，再从频率偏移算速度。这个思路很直观，但在实际雷达系统中，脉冲雷达更为常见——因为它既能测距又能测速。

脉冲雷达里的速度信息不再表现成一段连续差频信号，而是体现在相邻脉冲之间的相位变化中。更具体地说：距离靠单个脉冲测出来，速度靠多个脉冲之间的规律变化测出来。

那么为什么相邻脉冲之间固定的相位差，能换算成多普勒频率，进而得到速度？

5.3.1 脉冲间相位差

单个脉冲最擅长回答“目标大概在哪个距离上”。回波比发射晚到多少，就对应目标离雷达有多远。只看一个脉冲，你最多知道某个距离单元里有没有目标，却很难判断它是静止、靠近还是远离。

原因并不复杂。速度不是靠某一个脉冲里突然多出什么新特征判断的，而是靠相邻脉冲之间有没有持续、稳定的变化来判断的。可以把它类比成拍照：只看一张照片，你能看出人站在哪里；连看很多张按固定时间间隔拍下的照片，你才能看出他是不是在持续移动。

脉冲雷达的数据结构可以用下图来理解：

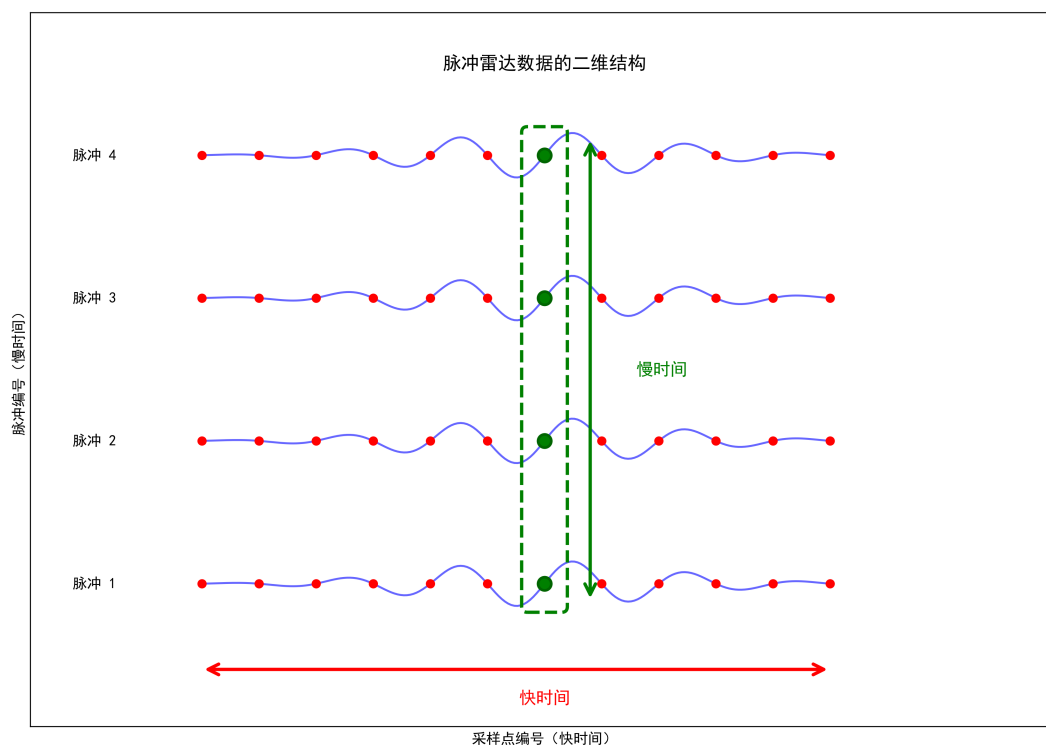


图 5: 快时间与慢时间

每一行代表一个脉冲内的采样点，这是**快时间**方向，对应距离维度；每一列代表同一距离单元在不同脉冲的采样，这是**慢时间**方向，对应速度维度。快时间主要给距离，慢时间主要给速度。

设雷达每隔 T_r 秒发射一个脉冲。若目标径向速度为 v ，那么从一个脉冲到下一个脉冲之间，目标沿视线方向移动了

$$\Delta R = vT_r$$

电磁波往返一次，这会带来额外传播路程

$$\Delta L = 2\Delta R = 2vT_r$$

而电磁波每走一个波长 λ ，相位就多转 2π 。因此，相邻两个脉冲之间的额外相位差为

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} = 2\pi \frac{2vT_r}{\lambda}$$

再利用上一节已经得到的多普勒关系

$$f_d = \frac{2v}{\lambda}$$

就得到

$$\Delta\phi = 2\pi f_d T_r$$

这个式子说明：目标一旦在运动，回波相位就不会停在原地，而是会随着脉冲序号一拍一拍地稳定转动。静止目标对应 $\Delta\phi \approx 0$ ；目标速度越大，脉冲间相位转动得越快。

但要注意：如果目标速度太大，使得 $\Delta\phi$ 超过 $\pm\pi$ ，相位就会”折叠”回来，导致速度模糊。这就是为什么脉冲雷达有”最大不模糊速度”的限制——速度测量的有效范围取决于脉冲重复频率。

5.3.2 相位差法与慢时间 FFT

既然相邻两个脉冲之间的相位差已经和多普勒频率对应起来了，为什么不直接测相位差，而要做 FFT？

从原理上说，直接利用相位差当然是可行的。若慢时间上相邻脉冲之间的相位差是 $\Delta\phi$ ，又知道脉冲重复周期 T_r ，就可以由

$$\Delta\phi = 2\pi f_d T_r$$

解出多普勒频率 f_d ，再进一步换算成速度。

但这样做有一个明显问题：只利用了很少的数据。若只看相邻两个脉冲，速度估计几乎完全建立在”一次相位差测量”上。噪声稍大一点，或者目标回波比较弱，这个相位差就会抖动得很厉害，算出来的速度也会跟着不稳。

把多个脉冲放在一起看就不同了。不再只依赖某一对脉冲之间的相位差，而是去看整串脉冲的相位变化规律。这样做有两个好处：

1. 积累增益：能把更多脉冲上的信息一起利用起来，结果更稳；
2. 多目标分离：如果同一距离单元里不止一个目标，例如一个目标慢速靠近、另一个目标快速远离，它们对应的相位变化速率不同，就有机会把这两个目标分开。但如果两个目标的速度差太小（对应的频率间隔小于 $1/(NT_r)$ ），FFT 就无法把它们分开——这就是速度分辨率的限制。

FFT 的作用就是把多个脉冲的相位变化信息稳定地提取出来。下面看它是怎么做到的。

5.3.3 慢时间序列的复指数模型

前面已经推出：若相邻脉冲间的相位增量恒定为 $\Delta\phi$ ，那么第 m 个脉冲上的相位就是

$$\phi_m = \phi_0 + (m-1)\Delta\phi$$

若把某个距离单元在第 m 个脉冲上的回波写成复数形式，就是

$$z[m] = Ae^{j\phi_m} = Ae^{j[\phi_0 + (m-1)\Delta\phi]}$$

这是一个相位线性增长的复数序列。现在的问题是：怎样从这个序列中把相位增量 Δ （进而得到多普勒频率）稳定地提取出来？

答案是：用 FFT 测量相位变化速率。FFT 会告诉我们”每个样本相位增加多少弧度”（归一化频率），然后我们根据采样间隔把它转换成实际频率（Hz）。

5.3.4 FFT 的模板匹配机制

FFT 的核心思想：用一组不同相位变化速率的”标准模板”去和当前样本比对。每个模板也是一个相位线性增长的序列，但增长速率不同。哪个模板的相位增长速率和样本最接近，哪里就出现峰值。

离散傅里叶变换的公式是：

$$Z[k] = \sum_{m=0}^{N-1} z[m]e^{-j2\pi km/N}$$

这里的 k 是模板编号， $e^{-j2\pi km/N}$ 就是第 k 个标准模板。模板 k 对应的相位变化速率是 $2\pi k/N$ 弧度/样本。

为什么相乘能测匹配度？关键在于：如果样本和模板的相位变化速率一致，相乘后样本的相位被模板”抵消”，所有项都指向同一方向，累加结果最大；如果不一致，相乘后各项指向不同方向，相互抵消，累加结果接近零。对每一个 k ：

- 如果样本 $z[m]$ 的相位增长速率和这个模板一致，相乘后各项会同向累加， $|Z[k]|$ 很大
- 如果相位增长速率不一致，相乘后会相互抵消， $|Z[k]|$ 很小

FFT 就是在测量”样本的相位变化速率”和”各个候选模板的相位变化速率”的匹配程度。峰值位置 k 反映了样本的相位变化速率是 $2\pi k/N$ 弧度/样本。

下面用一个最简单的例子来演示这个过程。假设固定某一距离单元以后，连续观察 4 个脉冲，得到的样本恰好是

$$z[0] = 1, \quad z[1] = j, \quad z[2] = -1, \quad z[3] = -j$$

这四个样本的幅度都相同，但相位依次是

$$0^\circ, \quad 90^\circ, \quad 180^\circ, \quad 270^\circ$$

也就是说，每往后一个脉冲，相位就多转 90° 。这里 $N = 4$ 。

先看 $k = 1$ 的情况。代入公式可得

$$Z[1] = \sum_{m=0}^3 z[m]e^{-j2\pi(1)m/4}$$

把各项逐个写开：

$$Z[1] = z[0]e^0 + z[1]e^{-j\pi/2} + z[2]e^{-j\pi} + z[3]e^{-j3\pi/2}$$

$$= 1 \cdot 1 + j \cdot (-j) + (-1) \cdot (-1) + (-j) \cdot j$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

这个结果为什么会这么大？因为当 $k = 1$ 时，模板 $e^{-j2\pi m/4}$ 的相位变化速率恰好和样本一致。相乘后，样本的相位被”抵消”掉，四项都变成了同一个方向，于是能够同向累加。

再看 $k = 0$ 的情况。代入公式有

$$Z[0] = \sum_{m=0}^3 z[m]e^{-j2\pi(0)m/4}$$

因为 $e^0 = 1$ ，这相当于用”零相位变化速率模板”（相位不变）去匹配。把四个样本直接相加：

$$Z[0] = 1 \cdot 1 + j \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-j) \cdot 1$$

$$= 1 + j - 1 - j = 0$$

因为样本的相位在转动，而模板相位不变，两者不匹配，所以相互抵消。

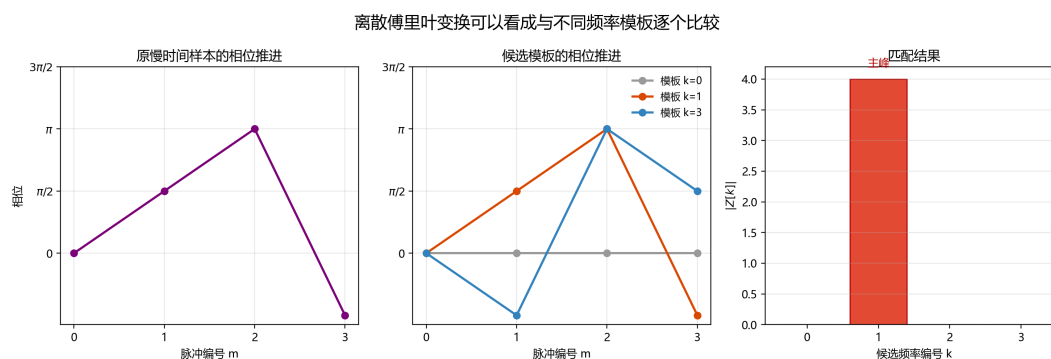


图 6: 离散傅里叶变换中的模板匹配示意图

上图展示了 FFT 的模板匹配过程。左图是某一距离单元上的慢时间样本，相位随脉冲编号稳定推进；中图是几个候选模板；右图是各个候选模板对应的匹配结果 $|Z[k]|$ ，最匹配的位置形成最高峰。

这个例子说明了 FFT 的工作原理：

- 样本序列 $z[m]$ 的相位以速率 Δ （弧度/样本）线性增长
- FFT 用不同的模板去匹配这个相位变化速率
- 模板 $e^{-j2\pi km/N}$ 对应的相位变化速率是 $2\pi k/N$ 弧度/样本
- 当 $k=1$ 时，模板的相位变化速率是 $2\pi/4 = 90^\circ$ /样本，恰好匹配样本

- FFT 求的就是相位变化速率（归一化频率），而不是直接求实际频率

实际中，目标的多普勒频率往往不会恰好落在某个整数 k 上。这时能量会” 泄漏” 到相邻的频点，峰值会变宽、变矮——这就是频谱泄漏现象。

接下来的问题是：如何把这个” 相位变化速率” 转换成实际的多普勒频率？

5.3.5 从相位变化速率到多普勒频率

上面的计算告诉我们” 在 $k = 1$ 处有峰”，这意味着样本的相位变化速率是 $2\pi k/N = 2\pi/4 = 90^\circ/\text{样本}$ 。但这个” 归一化频率” 如何对应到实际的多普勒频率（Hz）？

关键在于：每个” 样本” 对应的时间间隔是 T_r （脉冲重复周期）。

如果相位变化速率是 $2\pi k/N$ 弧度/样本，那么换算成单位时间的相位变化速率就是：

$$\omega = \frac{2\pi k/N}{T_r} = \frac{2\pi k}{NT_r} \quad (\text{弧度/秒})$$

对应的频率（Hz）为：

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{k}{NT_r} = \frac{k \cdot f_s}{N}$$

其中 $f_s = 1/T_r$ 是慢时间采样率。

这个公式建立了” FFT 峰值位置 k ” 和” 实际频率 f ” 的对应关系：

- k 反映相位变化速率（归一化频率）
- 乘以 f_s/N 转换成实际频率（Hz）

回到刚才 $N = 4$ 的例子。若脉冲重复周期 $T_r = 1 \text{ ms}$ ，则慢时间采样率 $f_s = 1000 \text{ Hz}$ 。频谱上 $k = 1$ 对应的频率为

$$f = \frac{1 \times 1000}{4} = 250 \text{ Hz}$$

这个 f 就是多普勒频率 f_d 。

验证一下：如果多普勒频率是 250 Hz，那么相邻脉冲间的相位差应该是

$$\Delta\phi = 2\pi f_d T_r = 2\pi \times 250 \times 0.001 = 0.5\pi = 90^\circ$$

这正好和我们例子中的样本相位变化（每脉冲转 90° ）一致！FFT 成功地测量出了相位变化速率，然后我们把它转换成了实际频率。

最后，由多普勒频率换算成速度：

$$v = \frac{\lambda f_d}{2}$$

例如，若雷达工作波长 $\lambda = 0.03 \text{ m}$ （对应 10 GHz），则

$$v = \frac{0.03 \times 250}{2} = 3.75 \text{ m/s}$$

这样就完成了从”脉冲间相位差”到”目标速度”的完整换算。

至此，整个测速链条就清楚了：目标运动产生固定相位差，FFT 通过模板匹配测出相位变化速率，再转换成多普勒频率，最后换算成速度。前面都是在单个距离单元里讨论速度测量。实际雷达数据是二维的——既有距离维度，又有速度维度。MTD 就是把这套思想应用到整个二维数据阵列上的方法。

5.4 MTD 的基本思想

上一节已经说明：相位差对应多普勒频率，FFT 能把这个频率提取出来。

这一节把这件事放回真实的二维数据结构里，看看 MTD 怎样在整个处理流程中应用这个思想，最终得到距离-速度二维图。

5.4.1 慢时间处理与速度提取

把多个脉冲的回波按”脉冲序号 × 脉冲内采样点”排开，就得到二维数据矩阵。若记为 $X(m, n)$ ，则：

- m 表示脉冲序号，常称为慢时间；
- n 表示脉冲内采样点，常称为快时间。

快时间方向主要负责距离，慢时间方向主要负责速度。也就是说，先沿横向区分不同距离，再沿纵向观察同一距离单元在多个脉冲上的变化。

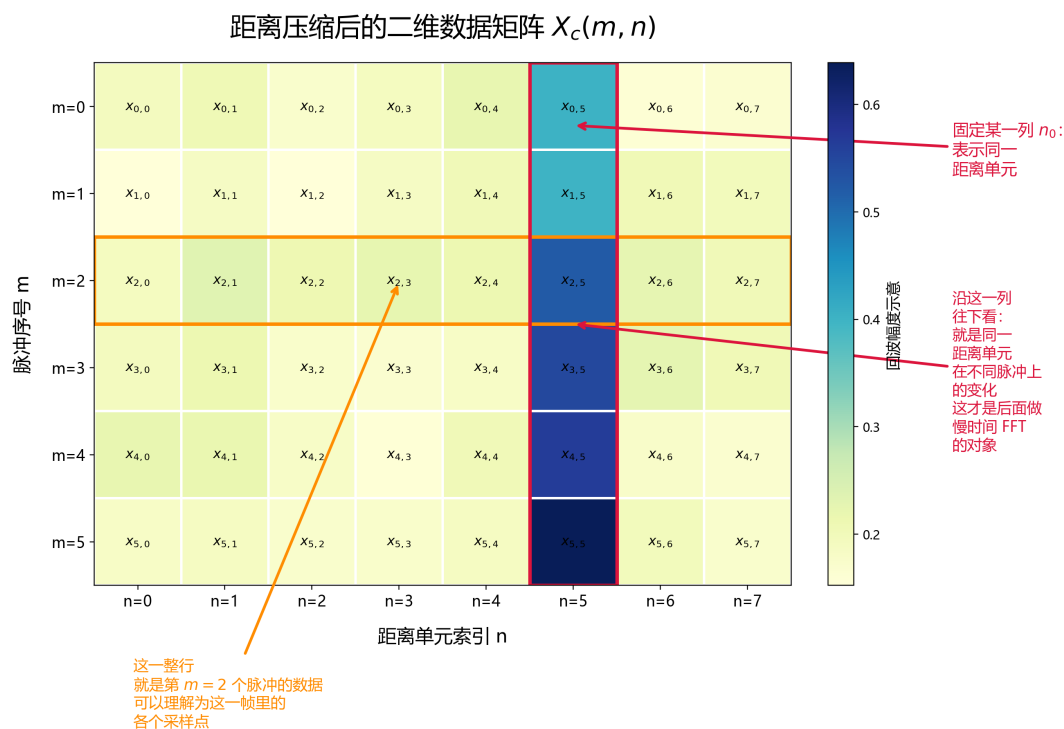


图 7: 距离压缩后的二维数据矩阵

上图给出了距离压缩后的二维数据矩阵示意。这里的”距离压缩”指的是在快时间上做第四章的脉冲压缩（匹配滤波），压缩后的结果反映出目标的距离，因此称为距离压缩。横向是不同距离单元，纵向是不同脉冲。对某一个固定距离单元来说，就是从整张图里抽出一列来看；这一列中的复数样本，正是后面要做慢时间分析的对象。

需要注意的是，虽然每个脉冲都经过了脉冲压缩，但这不影响慢时间上的相位关系。匹配滤波会把回波的载波相位”保留”在脉压后的复数值中，因此固定某一距离单元后，这一列样本在相邻脉冲间仍然保持 5.3 节推导的固定相位差 $\Delta\phi = 2\pi f_d T_r$ ，慢时间 FFT 依然能够提取出多普勒频率。（详细推导参见本节末尾的附录）

若距离压缩后的矩阵记为 $X_c(m, n)$ ，则某一距离单元 n_0 上的慢时间序列可以写成

$$z[m] = X_c(m, n_0), \quad m = 1, 2, \dots, N$$

这表示：现在不再看整张二维矩阵，而是只盯住同一个距离单元，观察它在第 1 个脉冲、第 2 个脉冲、第 3 个脉冲上的数值怎样变化。

如果目标静止，这一列里的数值在相邻脉冲之间通常变化不大；如果目标在运动，这一列里的相位就会按固定节奏一点一点转动。于是，原来的测速问题就变成了一个更具体的问题：这串样本到底在按多快的节奏变化？

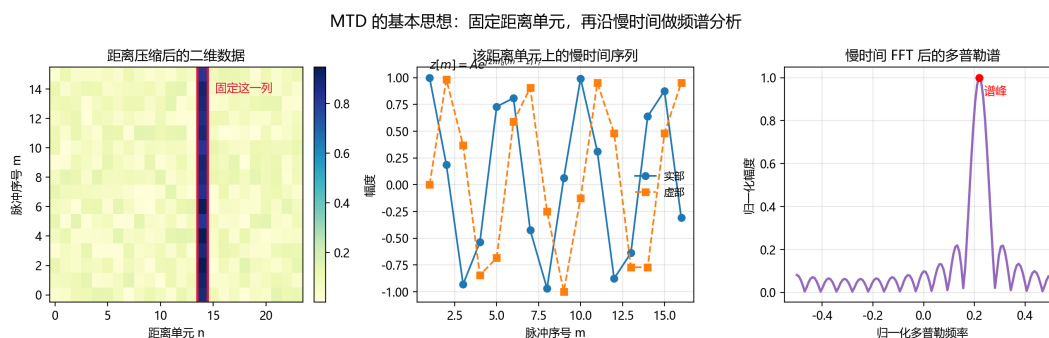


图 8: MTD 的基本思想示意图

上图展示了这一过程。左图中固定某一列以后，就得到中图所示的慢时间序列。这个序列的实部和虚部随脉冲编号呈现规律变化，说明目标在该距离单元上存在稳定的相位转动。右图对这串慢时间序列做 FFT 后，得到明显的频谱峰值，这个峰值所对应的多普勒频率，就是速度估计的依据。

5.4.2 距离-速度图的表示

到这里，距离处理和速度处理的分工就清楚了。沿快时间方向做距离压缩以后，系统已经知道目标大致落在哪一个距离单元上，也就是先回答了”目标在什么距离位置”。随后，对这个距离单元里的慢时间样本做傅里叶变换，得到多普勒频率，再由多普勒频率换成速度，这一步回答的是”目标以多大速度运动”。

换句话说，在脉冲雷达中：

- 距离向处理负责确定目标在何处；
- 慢时间方向的 FFT 负责确定目标速度。

如果对每一个距离单元都重复这一过程，就不再只是得到”某一列的频谱”，而是会得到一张二维结果图：横向对应距离，纵向对应速度。图上的每一个亮点，都可以同时读出两个信息：

- 它落在哪一个距离单元上；
- 它落在哪一个速度单元上。

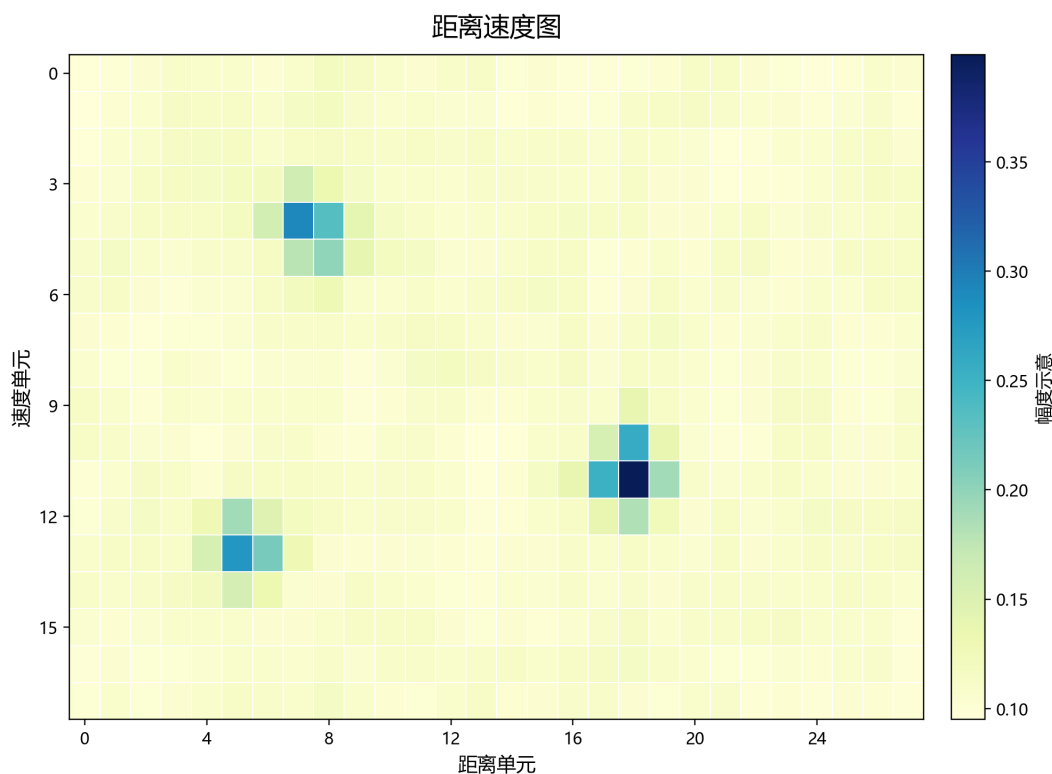


图 9: 慢时间 FFT 后形成的距离—速度二维图

上图给出了这一结果的示意。横向位置决定目标距离，纵向位置决定目标速度。图中不再只是某一列上的频谱，而是把每一个距离单元都沿慢时间做了 FFT 之后的整体结果放在一起看。这样一来，距离压缩先把目标在横向上分开，慢时间 FFT 再把不同速度在纵向上分开，原来”目标在什么地方”和”目标运动得多快”这两个问题，就能在同一张二维图上同时表示出来。

读这类二维图时，可以按一个固定顺序来看。先看横向，判断亮点分别落在哪些距离单元上；再看纵向，判断这些亮点对应哪些速度单元。若某一片区域比周围更亮，通常表示该距离—速度位置上存在较强目标响应。

就这张图而言，可以看到 3 个比较明显的亮区，因此可以把它理解为 3 个目标响应。左下方的亮区表示一个目标位于较近距离、较高速度单元；左上方的亮区表示另一个目标位于稍远一些的距离、但速度单元不同；右侧的亮区则表示第三个目标位于更远距离，并且速度单元也与前两个目标不同。这样读者就能直接看到：不同目标不仅会在距离轴上分开，也会在速度轴上分开。

同时还要注意，图中的每个目标并不一定只表现为一个孤立像素点，主峰周围常常还会出现邻近抬升。这是因为实际处理结果往往会带有主瓣展宽、能量泄漏或相邻单元响应，因此二维图看上去通常会比单一频谱更接近真实雷达输出。

MTD 把第 4 章的距离处理和本章前两节的多普勒关系结合起来：先对每个脉冲做距离压缩，把目标分到不同距离单元；再固定某一距离单元，对它在多个脉冲上的复数样本做 FFT，由频谱峰值估计多普勒频率和速度。前面讲的 $f_d = 2v/\lambda$ 说明了测速的物理基础，5.3 节的 FFT 说明了频率提取方法，这一节说明了在脉冲雷达里的具体应用。

本书只保留 MTD 的基本思想，不展开更复杂的滤波器组、杂波抑制和工程实现细节。到第七章进入 MATLAB 实现时，读者会看到距离—速度二维处理就是这一节慢时间处理思想的直接应用。

5.4.3 附录：脉冲压缩后慢时间相位关系的证明

本节正文中提到，虽然每个脉冲都经过了脉冲压缩，但慢时间上的相位差仍然保持 $\Delta\phi = 2\pi f_d T_r$ 。这里给出详细推导。

假设发射信号为 $s(t)$ ，载频为 ω_c 。第 0 个脉冲发射后，目标距离 R_0 ，回波延迟 $\tau_0 = 2R_0/c$ 。回波信号可以写成

$$r_0(t) = A \cdot s(t - \tau_0) e^{j\omega_c(t - \tau_0)}$$

匹配滤波的输出为

$$y_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_0(\xi) s^*(\xi - t) d\xi$$

在峰值位置 $t = \tau_0$ 处，代入回波表达式：

$$\begin{aligned} y_0(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot s(\xi - \tau_0) e^{j\omega_c(\xi - \tau_0)} \cdot s^*(\xi - \tau_0) d\xi \\ &= A e^{-j\omega_c \tau_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\xi - \tau_0) s^*(\xi - \tau_0) d\xi \\ &= A e^{-j\omega_c \tau_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |s(\xi - \tau_0)|^2 d\xi \end{aligned}$$

积分项是实数（信号能量），因此脉压后得到的复数值相位为

$$\phi_0 = -\omega_c \tau_0 = -\frac{4\pi R_0}{\lambda}$$

到第 1 个脉冲时，目标距离变为 $R_1 = R_0 + vT_r$ ，回波延迟 $\tau_1 = 2R_1/c$ 。同样的推导可得脉压后的相位为

$$\phi_1 = -\omega_c \tau_1 = -\frac{4\pi R_1}{\lambda} = -\frac{4\pi(R_0 + vT_r)}{\lambda}$$

两个脉冲脉压后的相位差为

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_0 = -\frac{4\pi(R_0 + vT_r)}{\lambda} - \left(-\frac{4\pi R_0}{\lambda}\right) = -\frac{4\pi vT_r}{\lambda} = 2\pi \cdot \frac{2v}{\lambda} \cdot T_r = 2\pi f_d T_r$$

这证明了：匹配滤波把回波的载波相位保留在了脉压后的复数值中，相邻脉冲间的相位差仍然由目标运动决定，与 5.3 节的推导完全一致。

5.5 实际应用

前面几节讲的多普勒测速原理，在日常生活中随处可见。这一节挑三个典型场景来看：交警的测速枪、气象雷达的风速测量、以及汽车上的防撞雷达。它们使用的雷达体制各不相同，但背后的测速思路是一样的。

5.5.1 应用 1：交警测速枪

路边的测速枪是最常见的多普勒雷达应用。它采用连续波体制——雷达持续发射单频信号（通常 24 GHz 或 35 GHz），回波与发射信号混频后得到差频信号，再做 FFT 找到频率峰值，由 $v = c\Delta f / (2f_0)$ 算出速度。整个过程在几十毫秒内完成。

为什么用连续波而不是脉冲？因为测速枪只需要测速度，不需要测距离。连续波结构简单、成本低、功耗小，适合做成手持设备。测量精度通常在 ± 1 km/h 以内，足够用于交通执法。

如果测速枪不是正对着车辆，而是成角度 θ ，测得的速度是真实速度的 $\cos\theta$ 倍。例如，卡口与车道成 30° 角，测得速度会比真实速度低约 13%。这就是为什么警察通常尽量正对车道测速。

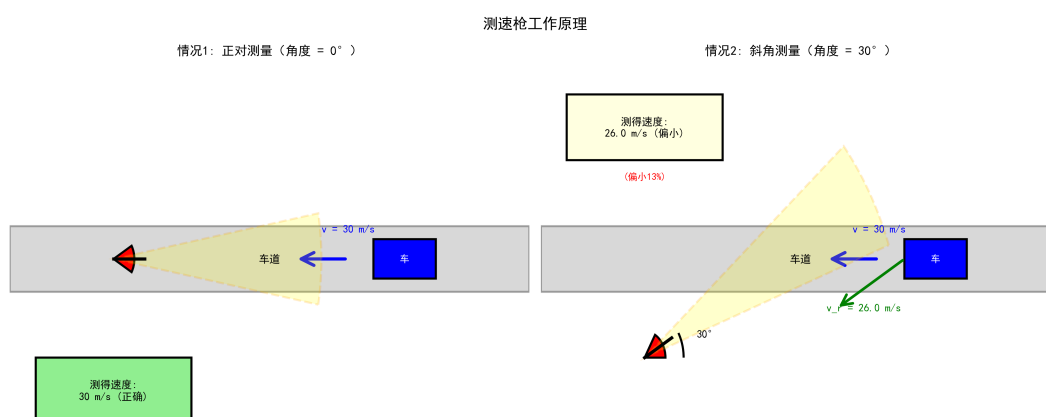


图 10: 测速枪工作示意图

上图展示了正对和偏角两种情况：正对时测得的速度准确，偏角时得到的是径向速度分量，因此偏低。

5.5.2 应用 2：气象雷达测风速

天气预报里的风速数据，很多来自多普勒天气雷达。它的工作原理和测速枪类似，但目标是空气中的雨滴、雪花等微小颗粒。

和测速枪不同，气象雷达采用脉冲体制——因为它不仅要知道风有多快，还要知道风在哪里。雷达发射脉冲后，通过回波的时间延迟确定雨滴的距离，再通过相邻脉冲之间的相位差（正是 5.3 节讲的原理）计算多普勒频移，从而得到风速。雷达旋转扫描一圈，就能画出整个区域的风速分布图。

实际应用包括：

- 龙卷风预警：龙卷风的小范围内风向急剧变化可以通过多普勒雷达识别，其典型信号是相邻区域方向相反的频移。
- 风切变检测：机场附近的多普勒雷达能实时监测风速突变，预警起降阶段的危险。
- 降水估计：雨滴的运动速度和大小有关，频移信息可以辅助估算降水强度。

气象雷达通常工作在 S 波段 (2-4 GHz) 或 C 波段 (4-8 GHz)，扫频时不能用过高频率以免被雨水衰减，也不能用过低频以免分辨率不足。

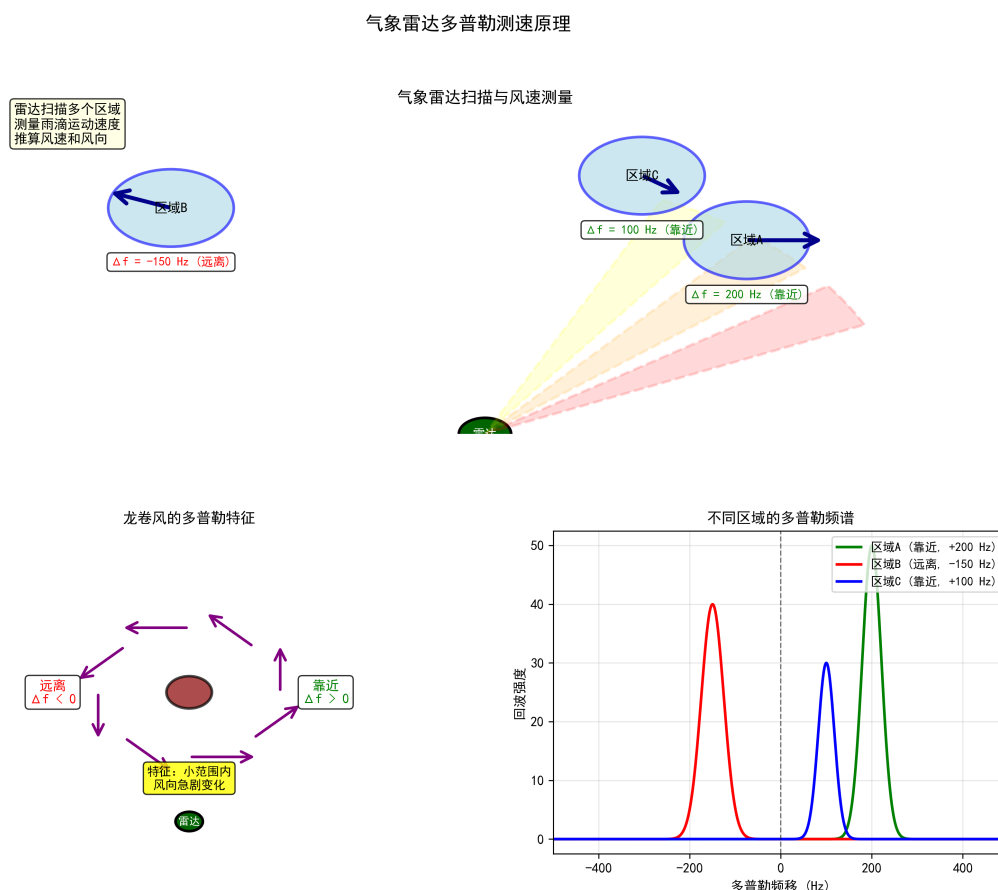


图 11: 气象雷达风速测量

图中展示了气象雷达的扫描方式，尤其是龙卷风的识别：局部相对方向性改变显而易见。

5.5.3 应用 3: 汽车防撞雷达

现代汽车上的自适应巡航 (ACC) 和自动紧急制动 (AEB) 功能都依赖车载毫米波雷达，这类雷达既要测距离，也要测速度。

汽车雷达采用的是第三种体制：调频连续波 (FMCW)。它发射频率随时间线性变化的信号 (类似第 4 章的 LFM)，回波与当前发射信号混频后，差频信号里同时包含了时间延迟 (对应距离) 和多普勒频移 (对应速度) 的信息。通过上下扫频两次测量，就能把距离和速度分离出来。

汽车雷达通常工作在 77 GHz 频段。选这个频率主要是因为波长只有约 4 mm，天线可以做

得很小，方便安装在车身上；同时高频也意味着更高的距离和角度分辨率。

典型性能指标：

- 探测距离：200-250 米
- 距离精度：约 10 cm
- 速度精度：约 0.1 m/s
- 角度分辨率：约 1-2°（通过多天线阵列实现）

汽车雷达常面对多目标场景，因此背后需要目标检测、聚类、跟踪等算法。

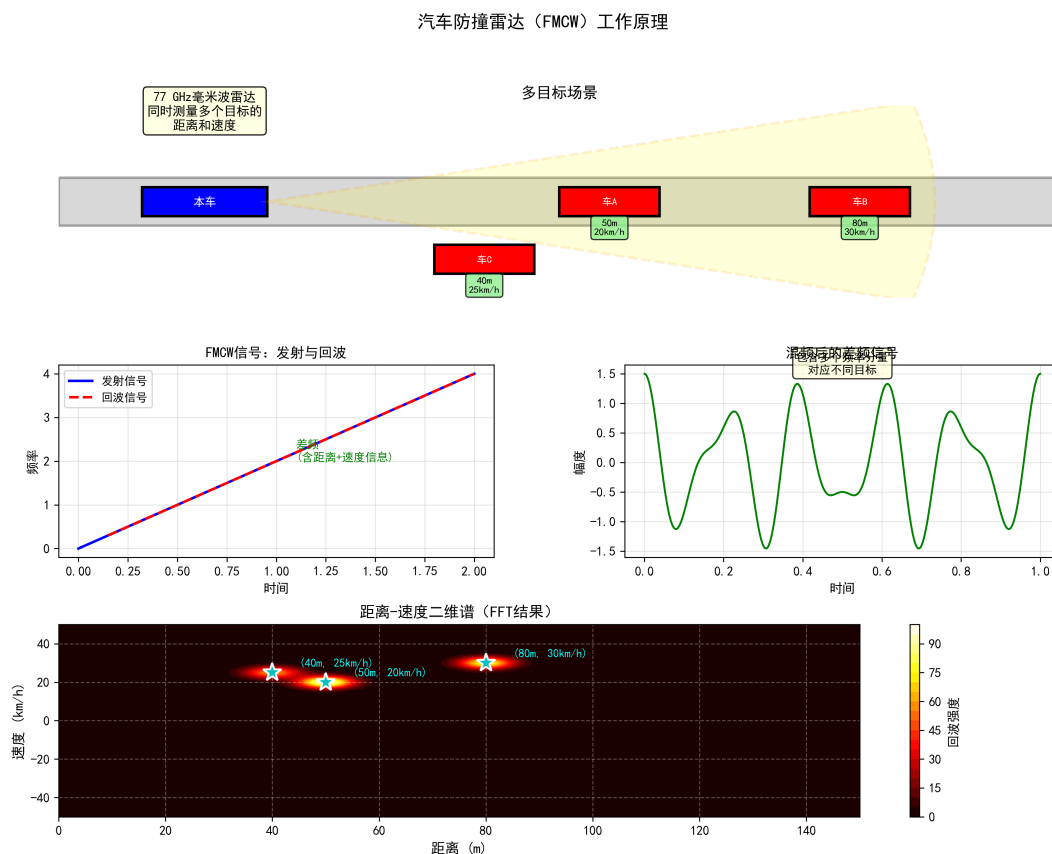


图 12: 汽车防撞雷达工作示意图

图中示意 FMCW 雷达的距离-速度谱，可同时看到多个目标的距离和速度信息。

5.5.4 实际系统面对的问题

上面三个应用看起来原理都很清楚，但真正做起来会碰到不少麻烦：

杂波。地面、建筑物等静止目标也会产生回波，只是频移为零。如果不把这些零频附近的信号滤掉，真正的运动目标就会被淹没。常用的办法是高通滤波，把零频附近的成分去掉。

多目标叠加。同一距离单元里可能有不止一个目标，它们的回波叠在一起。5.4 节讲的 FFT 能在频率上把它们分开，但如果两个目标速度很接近，就需要更长的观测时间来提高分辨率。

速度模糊。5.2 节已经提到，如果多普勒频移超过采样率的一半，就会发生混叠。实际系统

常用多个脉冲重复频率交替测量来解决这个问题。

5.6 小练习

这些练习围绕本章的主线展开：先把多普勒频移和径向速度的对应关系算清楚，再逐步加入角度、分辨率、采样率和工程设计约束。建议先自己做，再对照解析检查思路。

5.6.1 练习 1：基础计算

问题：一个工作在 10 GHz 的雷达，测得回波的多普勒频移为 3000 Hz。目标的径向速度是多少？

解析：根据公式

$$v = \frac{c\Delta f}{2f_0}$$

代入数据可得

$$v = \frac{3 \times 10^8 \times 3000}{2 \times 10 \times 10^9} = 45 \text{ m/s}$$

换算成 km/h，大约为

$$45 \times 3.6 = 162 \text{ km/h}$$

因此目标的径向速度为 45 m/s，约 162 km/h。

5.6.2 练习 2：测速枪的角度误差

问题：交警使用 24 GHz 测速枪测量车速。测速枪与车道成 30° 角，测得多普勒频移为 4157 Hz。车辆的真实速度是多少？

解析：先用多普勒公式算出测得的径向速度：

$$v_r = \frac{3 \times 10^8 \times 4157}{2 \times 24 \times 10^9} \approx 26 \text{ m/s}$$

由于测速枪并未正对车辆运动方向，因此有

$$v_r = v \cos \theta$$

所以真实速度为

$$v = \frac{v_r}{\cos 30^\circ} \approx \frac{26}{0.866} \approx 30 \text{ m/s}$$

换算后约为 108 km/h。这个练习说明：测量角度越偏，测速误差越大。

5.6.3 练习 3：速度分辨率

问题：一个 35 GHz 的测速雷达，观测时间为 0.2 秒。它能分辨的最小速度差是多少？

解析：速度分辨率近似为

$$\Delta v = \frac{c}{2f_0 T}$$

代入数据得

$$\Delta v = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 35 \times 10^9 \times 0.2} \approx 0.214 \text{ m/s}$$

换算成 km/h，约为 0.77 km/h。也就是说，这部雷达理论上能够区分约 0.21 m/s 的速度差。

5.6.4 练习 4：最大可测速度

问题：一个汽车防撞雷达工作在 77 GHz，采样率为 100 kHz。它能测量的最大速度是多少？如果目标速度超过这个值会发生什么？

解析：最大可测速度可按

$$v_{\max} = \frac{c f_s}{4 f_0}$$

计算，因此

$$v_{\max} = \frac{3 \times 10^8 \times 100000}{4 \times 77 \times 10^9} \approx 97.4 \text{ m/s}$$

约合 351 km/h。若目标速度超过这个上限，频谱会发生混叠，测速结果出现速度模糊，也就是测得的值不再是真实速度，而是折叠后的假象。

5.6.5 练习 5：气象雷达的风速测量

问题：一个 S 波段气象雷达（频率 3 GHz）测得某区域的多普勒频移为 200 Hz。这个区域的风速是多少？如果频移为 -150 Hz 呢？

解析：当频移为 200 Hz 时，速度为

$$v = \frac{3 \times 10^8 \times 200}{2 \times 3 \times 10^9} = 10 \text{ m/s}$$

由于频移为正，表示目标朝向雷达运动。

当频移为 -150 Hz 时，速度为

$$v = \frac{3 \times 10^8 \times (-150)}{2 \times 3 \times 10^9} = -7.5 \text{ m/s}$$

负号表示目标远离雷达。因此这两种情况分别对应 10 m/s 的来向风和 7.5 m/s 的去向风。

5.6.6 练习 6：综合应用

问题：设计一个测速枪，要求：

- 测量范围：0 到 200 km/h
- 速度精度：约 ± 1 km/h
- 观测时间：不超过 0.1 秒

请选择合适的雷达频率和采样率。

如果你想把不同参数快速代进去比较，可到公众号下载配套附件后运行 `ch05_doppler_calculator.m`。

解析：先把 200 km/h 换成约 55.6 m/s。为了覆盖这个速度范围，需要满足

$$f_s \geq \frac{4f_0 v_{\max}}{c}$$

如果选 24 GHz，则采样率至少约为 17.8 kHz，因此可取 20 kHz 作为一个有余量的值。

再看速度分辨率。若观测时间限制在 0.1 s，则

$$\Delta v = \frac{c}{2f_0 T}$$

在 24 GHz 下约为 0.625 m/s，也就是约 2.25 km/h。这个精度比 ± 1 km/h 稍差，因此如果要更稳地达到精度要求，可以提高雷达频率到 35 GHz，或适当延长观测时间。

因此，这道题的合理答案是：24 GHz + 20 kHz 可以满足速度范围，但若要更高精度，35 GHz 会更合适。

5.6.7 练习 7：编程实践（可选）

问题：编写一个 MATLAB 或 Python 程序，模拟多普勒测速的过程：

1. 生成一个频率为 10 GHz 的发射信号
2. 模拟一个速度为 30 m/s 的目标，生成带有多普勒频移的回波信号
3. 将发射信号和回波信号混频
4. 对混频后的信号做 FFT，找到多普勒频移
5. 从频移计算出速度，验证是否为 30 m/s

如果你不想从空白开始写，可到公众号下载配套附件后运行 `ch05_doppler_velocity_measurement.m`，先把完整流程跑通，再按自己的理解重写一遍。

解析：这道题的关键不是把代码写长，而是把处理链写对。先根据

$$\Delta f = \frac{2v f_0}{c}$$

算出理论多普勒频移，再用这个频移构造回波。回波与发射信号混频后，会留下差频分量。对差频信号做 FFT，频谱峰值对应的就是测得的多普勒频移。最后再按

$$v = \frac{c\Delta f}{2f_0}$$

把频移换回速度。若程序正确，计算结果应接近 30 m/s。

5.6.8 思考题

问题：请继续思考下面几个问题：

1. 为什么高速公路上的测速雷达通常架设在路边，而不是路中间？
2. 气象雷达如何区分雨滴和鸟群？
3. 如果一辆车同时向前开、向上坡爬，雷达测得的速度是什么？
4. 为什么汽车防撞雷达更常用 77 GHz，而不是 24 GHz？
5. 连续波雷达为什么不能直接测距离？若既要测速又要测距，应采用什么办法？